



دترمینان و وارون ماتریس، مشتق و کمترین مربعات

تمرین تئوری پنجم

تاریخ انتشار: ۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوثر مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتماً در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

سوالات (۱۰۰ نمره)

تاریخ تحویل: ۵ خرداد ۱۴۰۳

پرسش ۱ (۲۵ نمره) ثابت کنید که به ازای هر n ماتریس زیر وارون‌پذیر است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 4 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

پرسش ۲ (۲۵ نمره) روی هر مجموعه‌ای از اعداد مختلط (x_1, \dots, x_n) ماتریس $V_n(x_1, \dots, x_n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

این ماتریس، به ماتریس وندرموند معروف است که روی مجموعه (x_1, \dots, x_n) تعریف شده است. عبارت زیر را ثابت کنید:

$$\det V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

پرسش ۳ (۲۵ نمره) فرض کنید A یک ماتریس فول رنک ستونی باشد.

(آ) (۱۵ نمره) اگر x پاسخ حداقل مربعات $Ax = b$ باشد، عبارت زیر را برای هر بردار x ثابت کنید.

$$\|Ax - b\|^2 = \|Ax - b\|^2 + \|A(x - x_0)\|^2$$

رابطه بدست آمده را برای حالتی که معادله $Ax = b$ جواب نداشته باشد به صورت هندسی تعبیر کنید.

(ب) (۱۰ نمره) Ax نتیجه تصویر کردن b بر روی فضای ستونی A تحت ماتریس P می‌باشد. رابطه ماتریس P را بدست آورید و نشان دهید خواص ماتریس پروجکشن برای آن برقرار است.

پرسش ۴ (۲۵ نمره)

فرض کنید X و A ماتریس‌های وارون‌پذیر و n یک عدد طبیعی باشد. روابط زیر را اثبات کنید. (در نمایش Numerator)

(آ) (۱۰ نمره)

$$\frac{\partial \det(X^n)}{\partial X} = n \det(X^n) X^{-1}$$

(ب) (۱۵ نمره)

$$\frac{\partial \det A(t)}{\partial t} = \det A(t) \operatorname{tr}(A(t)^{-1} \frac{\partial A(t)}{\partial t})$$